УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

для студентов третьего курса физического факультета

Харьков
2015

Разработано сотрудниками кафедры теоретической физики
имени академика И.М. Лифшица:
доцентами О.И. Любимовым, Ю.П. Степановским, А.Т. Котвицким

Утверждено на заседании кафедры теоретической физики
имени академика И.М. Лифшица, протокол № 11 от 17 декабря 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Нередко удобно определять положение точки в пространстве не декартовыми координатами, а тремя другими величинами q_1, q_2, q_3, более соответствующими характеру решаемой задачи. Эти величины называют *криволинейными координатами.* Если наложить должные ограничения на область изменения криволинейных координат, то можно добиться взаимно однозначного соответствия между переменными $\underline{x_i}$ и q_i: $q_i = q_i\left(x_1, x_2, x_3\right)$ или $x_i = x_i\left(q_1, q_2, q_3\right)$, $i = (1,2,3)$. Поверхности, описываемые уравнением $q_i\left(x_1, x_2, x_3\right) = const$, называются *координатными.* Линии пересечения двух координатных поверхностей называются *координатными линиями.* Понятно, что вдоль координатной линии изменяется только одна из трех криволинейных координат. Если координатные линии в каждой точке пространства взаимно перпендикулярны, криволинейные координаты называются *ортогональными.* Примерами ортогональных криволинейных координат являются сферическая система координат $(q_1 = r,\, q_2 = \theta,\, q_3 = \varphi)$ и цилиндрическая система координат $(q_1 = \rho,\, q_2 = \varphi,\, q_3 = z)$.

Введем в каждой точке пространства орты $\left(\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3^{\,*}\right)$, направленные по касательным к координатным линиям в сторону возрастания соответствующих переменных q_i. В ортогональных координатах эти орты взаимно перпендикулярны: $\left(\vec{e}_i^{\,*}, \vec{e}_j^{\,*}\right) = \delta_{i\,j}$

Определим частную производную радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}\left(q_1, q_2, q_3\right)$ по координате q_i. Приращение вектора $d\vec{r}$ при малом изменении переменной q_i направлено вдоль орта $\vec{e}_i^{\,*}$: $d\vec{r} = H_i dq_i \vec{e}_i^{\,*}$, так что $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i^*$$

Положительные величины H_i называются *коэффициентами Ламе.*

Учтя, что $\vec{r} = \sum_j x_j \vec{e}_j$, получим: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{e}_j$. Отсюда $H_i^2 = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)^2$.

Квадрат расстояния ds^2 между двумя бесконечно близкими точками выражается через квадраты коэффициентов Ламе по формуле:

$$ds^2 = \left(d\vec{r}, d\vec{r} \right) = \left(\sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \right)^2 = \sum_i H_i^2 dq_i^2$$

Если провести через две бесконечно близкие точки координатные поверхности, то они ограничат бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с длинами ребер $dl_i = H_i dq_i$. Грани этого параллелепипеда имеют площади: $df_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3$, $df_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1$, $df_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2$,

а объем выражается формулой: $dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

В ортогональной криволинейной системе координат выражение для градиента скалярного поля Ψ имеет следующий вид:

$$grad\,\Psi = \sum_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} \vec{e}_i^* \qquad (1.1)$$

Дивергенция векторного поля $\vec{a}$ в ортогональной криволинейной системе координат определяется по формуле:

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial \left(a_1 H_2 H_3 \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(a_2 H_3 H_1 \right)}{\partial q_2} + \frac{\partial \left(a_3 H_1 H_2 \right)}{\partial q_3} \right] \qquad (1.2)$$

Ротор векторного поля $\vec{a}$ в ортогональной криволинейной системе координат можно записать через определитель:

$$rot\,\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{e}_1^{\,*} & H_2\vec{e}_2^{\,*} & H_3\vec{e}_3^{\,*} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1a_1 & H_2a_2 & H_3a_3 \end{vmatrix} \qquad (1.3)$$

Результат действия оператора Лапласа на скалярное поле определяется, как $\Delta\Psi = \text{div grad}\,\Psi$. Из приведенных выше формул для градиента и дивергенции непосредственно следует его выражение в криволинейной ортогональной системе координат.

$$\Delta\Psi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\Psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\Psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\Psi}{\partial q_3}\right)\right]. \qquad (1.4)$$

Задачи.

1.1 Для сферической и цилиндрической систем координат найти уравнения координатных поверхностей и координатных линий.

1.2 Записать квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками в сферической системе координат. (Для сферической системы координат $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\phi,\ x_3 = r\cos\theta$).

Решение задачи 1.2 Искомая величина равна сумме квадратов полных дифференциалов декартовых координат $ds^2 = \left(dx_1\right)^2 + \left(dx_2\right)^2 + \left(dx_3\right)^2$. Для их вычисления используем формулу $dx_i = \sum\limits_j \dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}dq_j$. $\left(q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi\right)$

В результате получим $ds^2 = \left(\sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi\right)^2 +$ $\left(\sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi\right)^2 + \left(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\right)^2$. Раскроем скобки и упростим выражение. Итого: $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$

1.3 Записать квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками в цилиндрической системе координат. (Для цилиндрической системы координат $x_1 = \rho\cos\varphi,\ x_2 = \rho\sin\varphi,\ x_3 = z$).

Решение задачи 1.3 Вычислим сумму квадратов полных дифференциалов декартовых координат: $ds^2 = \left(dx_1\right)^2 + \left(dx_2\right)^2 + \left(dx_3\right)^2 =$

$$\left(\cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi\right)^2 + \left(\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi\right)^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

1.4 Найти коэффициенты Ламе для сферической и цилиндрической систем координат.

Решение задачи 1.4 Искомые значения коэффициентов Ламе легко найти, используя их определение $\left(ds^2 = \sum_i H_i^2 dq_i^2\right)$ и ответы к задачам 1.2 и 1.3.

Для сферической системы координат:

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r\sin\theta.$$

Для цилиндрической системы координат:

$$H_1 = H_\rho = 1, \quad H_2 = H_\varphi = \rho, \quad H_3 = H_z = 1.$$

1.5 Записать формулы для длин ребер, площадей граней и объема бесконечно малого параллелепипеда, ограниченного координатными плоскостями, в сферической и цилиндрической системах координат.

1.6 Получить формулы для градиента скалярного поля Ψ в сферической и цилиндрической системах координат.

Решение задачи 1.6 для сферической системы координат. Подставим в выражение (1.1) найденные выше коэффициенты Ламе. Получим:

$$grad\,\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\vec{e}_r^{\,*} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta^{\,*} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi^{\,*}$$

1.7 Получить формулы для дивергенции векторного поля $\vec{a}$ в сферической и цилиндрической системах координат.

Решение задачи 1.7 для сферической системы координат. Подставим в выражение (1.2) найденные выше коэффициенты Ламе. Получим:

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta a_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

1.8 Получить формулы для ротора векторного поля $\vec{a}$ в сферической и цилиндрической системах координат.

1.9 Получить формулы для лапласиана скалярного поля Ψ в сферической и цилиндрической системах координат.

Решение задачи 1.9 Подставим в выражение (1.4) соответствующие коэффициенты Ламе. В итоге получим для сферической системы координат:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$

Соответственно для цилиндрической системы координат:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

1.10 Найти $grad\,\Psi(r)$, $\Delta\Psi(r)$ в сферической системе координат для функций:

а) $\Psi(r) = 3r^2$, б) $\Psi(r) = r^3 + 2r^2$, в) $\Psi(r) = \sin\left(r^2\right)$

1.11 Найти $grad\,\Psi(\rho,z)$, $\Delta\Psi(\rho,z)$, $grad\,\Psi(\rho)$, $\Delta\Psi(\rho)$ в цилиндрической системе координат для функций:

а) $\Psi(\rho,z) = \rho^2 + z^2$, б) $\Psi(\rho) = \sin\left(\rho^2\right)$.

2. ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ. ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ПОВОРОТАХ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Пусть O и O' две декартовы системы координат, повернутые друг относительно друга, с базисными векторами (ортами) $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$, $\left(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right)$, образующими правые ортонормированные тройки. Поскольку системы координат O и O' декартовы, то $\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \delta_{ij}$ и $\left(\vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j\right) = \delta_{ij}$.

Здесь δ_{ij} - символ Кронекера. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Произвольный вектор $\vec{a}$ можно разложить подобно радиус-вектору по ортам обеих систем координат:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_j a_j\vec{e}_j = a_j\vec{e}_j$$

$$\vec{a} = a'_1\vec{e}\,'_1 + a'_2\vec{e}\,'_2 + a'_3\vec{e}\,'_3 = \sum_j a'_j\vec{e}\,'_j = a'_j e'_j$$

(Данные выражения записаны с использованием правила Эйнштейна, которое подразумевает суммирование по парам повторяющихся индексов, в то время как знак суммы опускается. Это правило будет использовано в дальнейшем).

Величины a_i и a'_i называются компонентами вектора $\vec{a}$ и являются ортогональными проекциями данного вектора на орты $\vec{e}_i$ и $\vec{e}\,'_i$:

$$a_i = \left(\vec{e}_i, \vec{a}\right), \quad \text{и} \quad a'_i = \left(\vec{e}\,'_i, \vec{a}\right).$$

Установим связь между проекциями вектора на различные базисные орты:

$$a'_i = \left(\vec{e}\,'_i, \vec{a}\right) = \left(\vec{e}\,'_i \cdot \sum_j a_j\vec{e}_j\right) = \sum_j \left(\vec{e}\,'_i \cdot \vec{e}_j\right) a_j = \sum_j U_{ij} a_j = U_{ij} a_j \qquad (2.1)$$

где $U_{ij} = \left(\vec{e}_i', \vec{e}_j\right)$- матричные элементы матрицы поворота (U). Если объединить компоненты a_i' в одностолбцовую матрицу $(\bar{a})'$, а компоненты a_i в одностолбцовую матрицу $(\bar{a})$, то закон преобразования компонент вектора можно записать в матричных обозначениях:

$$(\bar{a})' = (U)(\bar{a})$$

Задание. Убедиться в справедливости последнего равенства, раскрыв в явном виде произведение матриц.

Докажем, что матрица (U) ортогональна, т.е. $(U)^T(U) = (1)$:

$$\sum_j (U)^T_{ij}(U)_{jk} = \sum_j U_{ji}U_{jk} = \sum_j \left(\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i\right)\left(\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_k\right) =$$

$$= \left(\left(\sum_j \left(\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i\right)\vec{e}_j'\right), \vec{e}_k\right) = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_k\right) = \delta_{ik}$$

При выводе мы воспользовались свойствами скалярного произведения и тем, что $\sum_j \left(\vec{e}_j', \vec{e}_i\right)\vec{e}_j' = \vec{e}_i$, поскольку левая часть равенства представляет собой разложение базисного орта $\vec{e}_i$ по базисным ортам $\vec{e}_j'$.

Задание. Докажите, что $(U)(U)^T = (1)$

С учетом закона преобразования компонент вектора при повороте системы координат можно дать следующее определение вектора:

Вектором называется трехкомпонентная величина, компоненты которой преобразуются при повороте системы координат так же, как компоненты радиус-вектора по правилу (2.1) с помощью матрицы поворота (U).

Такое определение вектора допускает обобщение на случай величин с числом компонент, большим трех. Так возможны девятикомпонентные величины, компоненты которых нумеруются двумя векторными индексами a_{ij}, каждый из которых пробегает независимо значения 1,2,3. Возможны 27-и

компонентные величины, компоненты которых a_{ijk} нумеруются тремя векторными индексами. Наконец, возможны 3^N- компонентные величины, компоненты которых нумеруются N векторными индексами $a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_N}$ (векторные индексы $i_1, i_2, \dots, i_N$ независимо пробегают множество значений 1,2,3). Если компоненты этих многокомпонентных величин преобразуются по законам:

$$a'_{ij} = \sum_{k,n} U_{ik} U_{jn} a_{kn} = U_{ik} U_{jn} a_{kn}$$

$$a'_{ijk} = \sum_{l,m,n} U_{il} U_{jm} U_{kn} a_{lmn} = U_{il} U_{jm} U_{kn} a_{lmn}$$

$$a'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_N} U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_N j_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N} = U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_N j_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N}$$

то эти многокомпонентные величины называются тензорами соответственно второго, третьего и N-ранга. Ранг тензора определяется числом векторных индексов, нумерующих его компоненты. Максимальное число независимых компонент тензора ранга N равно 3^N в случае трехмерного пространства.

Вопрос. Чему равно число независимых компонент тензора ранга N в случае двумерного пространства?

Компоненты тензора второго ранга естественно объединяются в квадратную матрицу со следующим законом преобразования матричных элементов:

$$a'_{ij} = \sum_{k,n} U_{ik} U_{jn} a_{kn} = \sum_{k,n} U_{ik} a_{kn} U_{jn} = \sum_{k,n} (U)_{ik}\, a_{kn} \left(U\right)^T_{nj}$$

или $$(a)' = (U)(a)(U)^T,$$

где $(a)'$ и (a) квадратные матрицы с матричными элементами a'_{ij} и a_{ij}.

Очевидно, что вектор является тензором первого ранга, а скаляр - нулевого. Ранг тензора также называют тензорной размерностью, или валентностью.

Задачи.

2.1 Найти матрицу преобразования системы декартовых координат (U) на плоскости при повороте на угол φ.

Решение задачи 2.1 Матричные элементы искомой матрицы вычисляются как скалярные произведения $U_{ij} = \left(\vec{e}'_i, \vec{e}_j\right)$, здесь индексы i,j принимают только два значения: 1 или 2. Так как все орты по определению имеют единичные модули, каждое скалярное произведение равно косинусу угла между соответствующими ортами. Нарисуйте на листе бумаги пояснительный чертеж и убедитесь, что углы между парами базисных орт $\vec{e}'_1, \vec{e}_1$ и $\vec{e}'_2, \vec{e}_2$ одинаковы и равны углу поворота φ. Поэтому $U_{11} = U_{22} = \cos\varphi$. Угол между ортами $\vec{e}'_1, \vec{e}_2$ равен $\pi/2 - \varphi$, и соответственно $U_{12} = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin\varphi$. Угол между ортами $\vec{e}'_2, \vec{e}_1$ равен $\pi/2 + \varphi$, поэтому $U_{21} = \cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin\varphi$.

2.1.1. Убедиться, что определитель матрицы (U) равен 1.

2.1.2 Убедиться, что матрица (U) ортогональна, т.е. $(U)(U)^T = (1)$, где $(U)^T$ -транспонированная матрица, а (1)-единичная матрица.

2.1.3 Убедиться, что (U_3) - матрица поворота на угол $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ совпадает с произведением матриц (U_1) и (U_2), которые являются матрицами поворота на углы φ_1 и φ_2 соответственно.

2.1.4. Убедиться, что матрица поворота (U_2) на угол $-\varphi$ совпадает с матрицей $(U_1)^T = (U_1)^{-1}$, где (U_1)- матрица поворота на угол φ.

2.2 Найти матрицу поворота (U) в трехмерном пространстве относительно заданной координатной оси на угол φ.

2.2.1 Вокруг оси Oz

Решение задачи 2.2.1 Очевидно, что базисные орты $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, повернутой вокруг оси Oz системы координат, лежат в Oxy плоскости исходной координатной системы. Выше (см. задачу 2.1) мы уже вычислили скалярные произведения $\left(\vec{e}_i', \vec{e}_j\right)$ для i,j=1 и 2. Фактически мы нашли соответствующие им матричные элементы искомой матрицы повороты в трехмерном пространстве: $U_{11} = U_{22} = \cos\varphi$, $U_{12} = -U_{21} = \sin\varphi$. Для нахождения остальных матричных элементов заметим, что базисные орты $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ ортогональны орту $\vec{e}_3$, поэтому $U_{13} = U_{23} = 0$. После выполнения поворота вокруг оси Oz направление аналогичной оси новой системы координат не изменится, т.е. орт $\vec{e}_3' = \vec{e}_3$. Оставшиеся матричные элементы вычисляются тривиально: $U_{3j} = \left(\vec{e}_3', \vec{e}_j\right) = \left(\vec{e}_3, \vec{e}_j\right) = \delta_{3j}$ (j=1,2,3). Выпишем явный вид матрицы поворота вокруг оси Oz:

$$(U) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Вокруг оси Ox

Решение задачи 2.2.2 во многом аналогично решению предыдущей задачи. Приведем в качестве ответа явный вид искомой матрицы поворота:

$$(U)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

2.2.3 Вокруг оси Оу

2.3 Найти матрицу поворота (U) в трехмерном пространстве на углы Эйлера. Углы Эйлера определены следующим образом: вначале проводится поворот на угол φ вокруг оси Oz, затем производится поворот на угол θ вокруг новой оси Ox', а после этого производится поворот на угол β вокруг новой оси Oz''.

2.3.1 Доказать, что матрица (U) может быть записана в виде произведения трех матриц $(U)=(U_3)(U_2)(U_1)$, где матрица (U_1) соответствует повороту на угол φ вокруг оси Oz, матрица (U_2) соответствует повороту на угол θ вокруг новой оси Ox', матрица (U_3) соответствует повороту на угол β вокруг новой оси Oz''.

Решение задачи 2.3.1 Рассмотрим вектор с компонентами a_i, заданными в исходной системе координат $Oxyz$. Объединим его компоненты в матрицу, состоящую из одного столбца $(\vec{a})$ (в так называемый вектор-столбец). Компоненты этого вектора в новой системе координат $Ox'y'z'$, повернутой вокруг оси Oz на угол φ, вычислим как матричное произведение $(\vec{a})'=(U_1)(\vec{a})$. Давайте рассматривать повернутую систему координат как новую исходную, и совершим далее поворот вокруг ее оси Ox'на угол θ. Компоненты вектора в новой, повернутой системе координат $Ox''y''z''$ вычислим как матричное произведение $(\vec{a})''=(U_2)(\vec{a})'=(U_2)(U_1)(\vec{a})$.

Матрица поворота $\left(U_2\right)$ составлена из косинусов углов между ортами новой исходной, и новой повернутой координатных систем. Для ее вычисления мы фактически должны повторить решение задачи 2.2.2 и получить в результате ту же матрицу с заменой угла φ на θ. Давайте примем систему координат $Ox''y''z''$ за новую исходную, и выполним последний поворот вокруг оси Oz'' на угол β. Компоненты вектора в системе координат $Ox'''y'''z'''$ теперь вычисляются как $\left(\vec{a}\right)''' = \left(U_3\right)\left(\vec{a}\right)'' = \left(U_3\right)\left(U_2\right)\left(U_1\right)\left(\vec{a}\right)$.

Матрица $\left(U_3\right)$ составлена их косинусов углов между соответствующими ортами. Она совпадает с матрицей поворота вокруг оси Oz, найденной в ходе решения задачи 2.2.1, с заменой угла φ на β. Итого: $\left(U\right) = \left(U_3\right)\left(U_2\right)\left(U_1\right)$.

Приведем для справки явный вид матрицы поворота на углы Эйлера φ, θ, β.

$$\left(U\right) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\cos\theta\sin\varphi & \cos\beta\sin\varphi + \sin\beta\cos\theta\cos\varphi & \sin\beta\sin\theta \\ -\sin\beta\cos\varphi - \cos\beta\cos\theta\sin\varphi & -\sin\beta\sin\varphi + \cos\beta\cos\theta\cos\varphi & \cos\beta\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2.3.2 Доказать, что $\left(U\right)\left(U\right)^T = \left(1\right)$.

2.3.3 Выразить матрицу обратного преобразования через произведение матриц поворотов вокруг осей Ox и Oz.

2.4 Найти матрицу $\left(U\right)$ для следующих углов Эйлера:

2.4.1 $\phi = \pi/3,\quad \theta = \pi,\quad \beta = \pi/2$

2.4.2 $\phi = \pi/4,\quad \theta = \pi/2,\quad \beta = \pi$

2.4.3 $\phi = \pi,\quad \theta = \pi/3,\quad \beta = \pi/2$

2.4.4 $\phi = \pi/3, \quad \theta = \pi/4, \quad \beta = \pi/6$

2.4.5 $\phi = 2\pi/3, \quad \theta = \pi/6, \quad \beta = \pi/3$

2.4.6 $\phi = 4\pi/3, \quad \theta = \pi/2, \quad \beta = \pi/6$

2.5 В случае двумерного пространства вычислить компоненты вектора b_i в системе координат повернутой на угол ϕ по сравнению с исходной. Компоненты вектора и угол ϕ следующие:

2.5.1 $b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad \phi = \pi/6$

2.5.2 $b_1 = 3, \quad b_2 = 1, \quad \phi = \pi/3$

2.5.3 $b_1 = 5, \quad b_2 = 2, \quad \phi = \pi/4$

2.5.4 $b_1 = -1, \quad b_2 = 4, \quad \phi = -\pi/6$

2.5.5 $b_1 = 2, \quad b_2 = 7, \quad \phi = \pi/2$

2.5.6 $b_1 = 4, \quad b_2 = -1, \quad \phi = -\pi/3$

2.6 В случае двумерного пространства вычислить компоненты тензора второго ранга a_{ij} в системе координат, повернутой на угол ϕ по сравнению с исходной. Компоненты тензора и угол ϕ следующие:

2.6.1 $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = -3, \quad a_{22} = 5, \quad \phi = \pi/3$

2.6.2 $a_{11} = -1, \quad a_{12} = 4, \quad a_{21} = -2, \quad a_{22} = 1, \quad \phi = \pi/4$

2.6.3 $a_{11} = 3, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -2, \quad a_{22} = 6, \quad \phi = \pi/6$

2.6.4 $a_{11} = 5, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad \phi = \pi/2$

2.6.5 $a_{11} = 2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -2, \quad a_{22} = 3, \quad \phi = -\pi/3$

2.6.6 $a_{11} = 0, \quad a_{12} = 6, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 4, \quad \phi = -\pi/2$

2.7 В трехмерном пространстве заданы компоненты вектора. Найти компоненты вектора в системе координат, повернутой на угол ϕ вокруг оси Ox по сравнению с исходной осью. Компоненты вектора и угол ϕ следующие:

2.7.1 $b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\quad b_3 = -3,\quad \phi = \pi/3$

2.7.2 $b_1 = 4,\quad b_2 = -1,\quad b_3 = 5,\quad \phi = \pi/2$

Решение задачи 2.7 дается общей формулой:

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Для конкретного варианта, указанного в пункте 2.7.1 получаем

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 3\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3} - 3/2 \end{pmatrix}$$

2.8. В трехмерном пространстве заданы компоненты вектора. Найти компоненты вектора в системе координат, повернутой на угол ϕ вокруг оси Oy по сравнению с исходной. Компоненты вектора и угол ϕ следующие:

2.8.1 $b_1 = -2,\quad b_2 = -1,\quad b_3 = -5,\quad \phi = -2\pi/3$

2.8.2 $b_1 = 3,\quad b_2 = 1,\quad b_3 = 2,\quad \phi = -\pi/4$

2.9 В трехмерном пространстве заданы компоненты вектора. Найти компоненты вектора в системе координат, повернутой на угол ϕ вокруг оси Oz по сравнению с исходной. Компоненты вектора и угол ϕ следующие:

2.9.1 $b_1 = 2,\quad b_2 = 4,\quad b_3 = -1,\quad \phi = \pi/4$

2.9.2 $b_1 = 5,\quad b_2 = -2,\quad b_3 = 3,\quad \phi = -\pi/2$

2.10 В случае двумерного пространства найти компоненты тензора δ_{ij} в системе координат, повернутой относительно исходной на угол φ.

3. ДЕЙСТВИЯ НАД ТЕНЗОРАМИ.

Перечислим возможные действия над тензорами, в результате которых возникают также тензорные величины.

1. Если все компоненты некоторого тензора умножить на одинаковую скалярную величину, в результате получится новая многокомпонентная величина, являющаяся тензором того же ранга, что и исходный тензор.

2. Покомпонентное сложение двух тензоров одинакового ранга дает компоненты тензора, называемого суммой исходных тензоров и имеющего тот же ранг. Складывать тензоры различных рангов недопустимо.

3. Если каждая компонента одного тензора ранга N умножается на всевозможные компоненты второго тензора ранга M, возникает многокомпонентная величина, являющаяся тензором ранга N+M. Данная операция называется операцией внешнего произведения тензоров.

4. Если из компонент тензора ранга N $\left\{A_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_p \ldots i_N}\right\}$ выбрать такие компоненты, у которых нумерующие индексы в двух позициях (скажем k и p) одинаковы $\left\{A_{i_1 i_2 \ldots (i_k = i) \ldots (i_p = i) \ldots i_N}\right\}$, и равны некоторой величине i, после чего сложить выбранные компоненты, отвечающие возможным значениям индекса i, т.е. i=1,2,3, при неизменных нумерующих индексах в других позициях, то полученная многокомпонентная величина:

$$\sum_i A_{i_1 i_2 \ldots (i_k = i) \ldots (i_p = i) \ldots i_N} = A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_{p-1} i_{p+1} \ldots i_N}$$

является тензором ранга N-2. Такая операция называется сверткой тензора по индексам, занимающими позиции k и p. Например

$$\sum_i a_{ii} = C, \qquad \sum_i a_{iik} = S_k, \qquad \sum_i a_{kii} = T_k$$

Задание. Показать, что число различных вариантов сверток тензора ранга N равно C_N^2.

5. Многокомпонентная величина, полученная из исходного тензора ранга N путем перестановки его индексов, является тензором того же ранга. Например, из компонент тензора второго ранга a_{ij} можно составить новый тензора второго ранга $b_{ij} = a_{ji}$. Симметричным называется тензор, компоненты которого не изменяются при перестановке индексов.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Аналогично, если при перестановке любой пары индексов у любой компоненты тензора возникает компонента, равная исходной по величине и противоположной по знаку, тензор называется антисимметричным.

Задание. Убедиться в том, что в трехмерном пространстве возможны антисимметричные тензоры только 2-го и 3-го рангов.

Для доказательства того, что в результате перечисленных выше действий над тензорами вновь возникают тензоры, необходимо убедиться в том, что компоненты последних преобразуются при преобразовании координат по тензорному закону. Докажем, например, что при свертке тензора 3-го ранга a_{ijk} возникает тензор ранга (3-2)=1, т.е. вектор. Свернем тензор a_{ijk}, например, по первому и второму индексам. Для этого отберем из 27 компонент a_{ijk} те, у которых два первых индекса одинаковы $\left(a_{iik}\right)$ и просуммируем по ним при фиксированном значении индекса k. Мы получим три компоненты $\sum_i a_{iik}$. (k=1,2,3). Чтобы доказать, что эти компоненты являются компонентами вектора, необходимо проверить, что они преобразуются по векторному закону. Выполним свертку тензора a'_{iik} в другой системе координат, которая повернута относительно исходной, и получим:

$$\sum_i a'_{iik} = \sum_{i,j,p,m} U_{ij} U_{ip} U_{km} a_{jpm} = \sum_{j,p,m} \left(\sum_i U_{ij} U_{ip} \right) U_{km} a_{jpm}$$

В силу ортогональности матрицы преобразования (U) имеем:

$$\sum_i U_{ij} U_{ip} = \delta_{jp}$$

С учетом этого получаем:

$$\sum_i a'_{iik} = \sum_{j,p,m} \delta_{jp} U_{km} a_{jpm} = \sum_m U_{km} \left(\sum_j a_{jjm} \right)$$

Отсюда следует, что данная свертка при повороте системы координат преобразуется по закону преобразования компонент вектора, что и требовалось доказать.

Задачи.

3.1 Даны скаляр b и тензор третьего ранга a_{ijk}. Доказать ,что $b \cdot a_{ijk}$ - тензор третьего ранга.

3.2 Даны тензоры второго ранга a_{ij} и b_{ij}. Доказать, что $a_{ij} + b_{ij}$ - тензор второго ранга.

Решение задачи 3.2 Выполним покомпонентное сложение этих тензоров в повернутой системе координат. $a'_{ij} + b'_{ij} = \sum_{kl} U_{ik} U_{jl} a_{kl} + \sum_{kl} U_{ik} U_{jl} b_{kl}$. Или, $a'_{ij} + b'_{ij} = \sum_{kl} U_{ik} U_{jl} \left(a_{kl} + b_{kl} \right)$. Отсюда следует, что сумма данных тензоров при повороте системы координат преобразуется по закону преобразования компонент тензора второго ранга, что и требовалось доказать.

3.3 Даны векторы a_i и b_i. Доказать, что множество величин $\{a_i \cdot b_j\}$ образуют тензор второго ранга. Такой тензор иногда называют диадой.

Решение задачи 3.3 Составим множество аналогичных величин из компонент векторов a_i' и b_i' в повернутой системе координат $\{a_i' \cdot b_j'\} = \left(\sum_k U_{ik} a_k\right)\left(\sum_l U_{jl} b_l\right) = \sum_{kl} U_{ik} U_{jl} \{a_k \cdot b_l\}$. Отсюда следует, что внешнее произведение двух векторных величин при повороте системы координат преобразуется по закону преобразования компонент тензора второго ранга, что и требовалось доказать.

3.4 Даны вектор a_i и тензор второго ранга b_{ij}. Доказать, что множество величин $\{a_i \cdot b_{jk}\}$ образуют тензор третьего ранга.

3.5 Дан вектор a_i. Показать, что сумма $\sum_i a_i$ не является скалярной величиной. (Т.е. не имеет тензорную природу).

Решение задачи 5.5. Рассмотрим конкретный пример, и убедимся, что указанная сумма изменится при повороте системы координат. Пусть в исходной системе координат компонента вектора $a_i = (1,1,1)$. Модуль данного вектора $\sqrt{\sum_i a_i^2} = \sqrt{3}$. Повернем систему координат так, чтобы новая ось OX была параллельна данному вектору. Очевидно, что в такой системе координат его компоненты $a_i' = (\sqrt{3}, 0, 0)$. В исходной системе координат сумма $\sum_i a_i = 3$, а в новой, соответственно: $\sum_i a_i' = \sqrt{3}$.

3.6 Дан тензор второго ранга a_{ij}. Доказать, что множество величин, задаваемых равенствами $b_{ji} = a_{ij}$, образует тензор второго ранга.

3.7 Дан тензор третьего ранга a_{ijk}. Доказать, что множество величин $b_{jik} = a_{ijk}$ образуют тензор третьего ранга.

3.8 Даны скаляр a и вектор b_i. Доказать, что трехкомпонентная величина $\left(a + b_i\right)$ не является величиной тензорной природы.

3.9 Доказать, что свертка тензора второго ранга a_{ij} является скаляром: $\sum\limits_i a_{ii} = a_{ii} = C$. Такая свертка часто называется следом тензора a_{ij}.

Замечание. Здесь и в дальнейшем знаки сумм будут зачастую опускаться, и использоваться правило суммирования Эйнштейна.

3.10 Даны тензоры второго ранга a_{ij} и b_{ij}. Доказать, что множество величин $\left\{a_{ij} \cdot b_{km}\right\}$ образуют тензор четвертого ранга.

3.11 Найти вектор $c_i = a_i + b_i$ и вектор $d_i = -3a_i$, где векторы a_i и b_i равны:

3.11.1 $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (3,-1,2)$

3.11.2 $\vec{a} = (5,4,2)$, $\vec{b} = (-1,2,8)$

3.11.3 $\vec{a} = (2,3,6)$, $\vec{b} = (4,-2,1)$

3.11.4 $\vec{a} = (-1,0,3)$, $\vec{b} = (2,-4,6)$

3.12 Найти тензор $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ и тензор $d_{ij} = 4a_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} являются тензорами в двумерном пространстве и их компоненты равны:

3.12.1 $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = -3,\ a_{22} = 5$

$b_{11} = -1,\ b_{12} = 4,\ b_{21} = -2,\ b_{22} = 1$

3.12.2 $a_{11} = 3,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = -2,\ a_{22} = 6$

$b_{11} = 5,\ b_{12} = 2,\ b_{21} = 1,\ b_{22} = 1$

3.12.3 $a_{11} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = -2,\ a_{22} = 3$

$$b_{11}=0,\ \ b_{12}=6,\ \ b_{21}=2,\ \ b_{22}=4$$

3.13 Вычислить след тензоров a_{ij} и b_{ij}, где тензоры a_{ij} и b_{ij} определены в задании 3.12

3.14 В двумерном пространстве заданы векторы a_i и b_i, а так же тензоры второго ранга c_{ij} и d_{ij}. Найти тензорную размерность приведенных ниже величин и вычислить все их компоненты:

3.14.1 $a_i b_j$	3.14.2 $a_i b_i$
3.14.3 $a_i c_{jk}$	3.14.4 $b_i d_{jk}$
3.14.5 c_{ii}	3.14.5 d_{jj}
3.17.6 $a_i c_{ij}$	3.14.7 $a_i c_{ji}$
3.14.9 $a_i c_{jj}$	3.14.10 $b_i d_{ij}$
3.14.11 $b_i d_{ji}$	3.14.12 $b_i d_{jj}$
3.14.13 $c_{ij} d_{jk}$	3.14.14 $c_{ji} d_{jk}$
3.14.15 $c_{ii} d_{jj}$	3.14.16 $c_{ij} d_{ij}$

Компоненты векторов a_i и b_i и тензоров c_{ij} и d_{ij} заданы ниже:

$$a_1=1,\ \ a_2=2,\ \ b_1=3,\ \ b_2=-1$$

$$c_{11}=3,\ \ c_{12}=1,\ \ c_{21}=-2,\ \ c_{22}=6$$

$$d_{11}=5,\ \ d_{12}=2,\ \ d_{21}=1,\ \ d_{22}=1$$

3.15 Тоже, что и в задании 3.14, но для других векторов a_i и b_i и тензоров c_{ij} и d_{ij} с компонентами:

$$a_1=2,\ \ a_2=1,\ \ b_1=4,\ \ b_2=-2$$

$$c_{11}=1,\ \ c_{12}=3,\ \ c_{21}=-5,\ \ c_{22}=7$$

$$d_{11}=0,\quad d_{12}=2,\quad d_{21}=4,\quad d_{22}=6$$

3.16 Тоже, что и в задании 3.14, но для других векторов a_i и b_i и тензоров c_{ij} и d_{ij} с компонентами:

$$a_1=-1,\quad a_2=3,\quad b_1=5,\quad b_2=-3$$

$$c_{11}=2,\quad c_{12}=0,\quad c_{21}=-3,\quad c_{22}=4$$

$$d_{11}=1,\quad d_{12}=1,\quad d_{21}=3,\quad d_{22}=2$$

3.17 В случае двумерного пространства убедиться, что след тензора второго ранга (сумма диагональных элементов тензора) в системе координат, повернутой на угол ϕ относительно исходной, равен следу тензора в исходной системе координат.

3.18 В случае трехмерного пространства доказать, что след тензора второго ранга одинаков во всех системах координат.

Решение задачи 3.18 Вычислим след тензора в повернутой системе координат. В данном примере мы не будем опускать символ суммирования по индексам. $\sum_i a'_{ii}=\sum_i\sum_{jk}U_{ij}U_{ik}a_{jk}$. Используя далее свойство ортогональности матрицы поворота $\sum_i U_{ij}U_{ik}=\delta_{jk}$, получим $\sum_i a'_{ii}=\sum_{jk}\delta_{jk}a_{jk}=$

$$\delta_{11}a_{11}+\delta_{12}a_{12}+\delta_{13}a_{13}+\delta_{21}a_{21}+\delta_{22}a_{22}+\delta_{23}a_{23}+\delta_{31}a_{31}+\delta_{32}a_{32}+\delta_{33}a_{33}.$$

Так компоненты единичного тензора δ_{jk} равны единице при совпадающих значениях индексов, и равны нулю в случае несовпадения значений индексов, в данную сумму может внести вклад только первое, пятое и девятое слагаемые. Итого $\sum_i a'_{ii}=\sum_{jk}\delta_{jk}a_{jk}=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\sum_i a_{ii}$.

3.19 Доказать, что множество величин (свертка) a_{ijj} образует вектор, если a_{ijk}-тензор третьего ранга.

3.20 Доказать, что множество величин (свертка) a_{ijjk} образует тензор второго ранга, если a_{ijkm}-тензор четвертого ранга.

4. СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА.

Свойства тензоров второго ранга a_{ij} эквивалентны свойствам квадратной матрицы $\left(a_{ij}\right)$, построенной из компонент тензора.

Тензор второго ранга a_{ij} называется симметричным, если для любых индексов i и j выполняется равенство: $a_{ij} = a_{ji}$.

Тензор второго ранга b_{ij} называется антисимметричным, если для любых индексов i и j выполняется равенство: $b_{ij} = -b_{ji}$.

Произвольный тензор второго ранга c_{ij} можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

где
$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left[c_{ij} + c_{ji}\right], \qquad b_{ij} = \frac{1}{2}\left[c_{ij} - c_{ji}\right]$$

Вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором симметричной *квадратной* матрицы $\hat{A}$, а λ - ее собственным значением, если выполняется условие:

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

В тензорной алгебре направление, задаваемое вектором $\vec{x}$ называется главным направлением тензора $\hat{A}$, а λ-главным значением тензора.

Система уравнений, из которой находятся главные направления и главные значения тензора является системой линейных, однородных уравнений относительно компонент вектора $\vec{x}$, которая имеет отличное от нуля решение только при условии :

$$\det\left\|\hat{A}-\lambda\hat{I}\right\|=0$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

где $\hat{I}$ - единичная матрица. Раскрывая определитель, получаем для нахождения главных (собственных) значений тензора алгебраическое уравнение третьей степени (т.е. кубическое уравнение).

Можно доказать, что в случае симметричного тензора полученное уравнение всегда имеет три вещественных корня. Возможно, что некоторые из них, совпадают по величине. (В этом случае корни называются кратными или вырожденными.) Если все корни различны, каждому из них однозначно соответствуют направления в пространстве, называемые главными направлениями тензора. В случае вырожденных корней возникает неоднозначность в выборе главных направлений. Так в случае двукратного вырождения корня существует плоскость, проходящая через начало координат, *перпендикулярная третьему главному направлению*, все направления на которой являются главными. Если вырождение трехкратное, то любые направления в пространстве являются главными. Аналогично, в случае тензоров на плоскости (двумерное пространство) возможны либо два разных вещественных корня, либо эти корни совпадут.

В согласии со сказанным, главные направления (главные оси) симметрического тензора второго ранга всегда можно выбрать взаимно ортогональными. Эти направления выбираются однозначно в случае невырожденных главных значений и неоднозначно в случае вырождения. В системе главных осей тензор диагонален, а на его главной диагонали стоят главные (собственные) значения.

$$a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$$

(Следует иметь в виду, что в данном случае суммирование по индексу i не подразумевается).

Для геометрической иллюстрации указанных свойств симметричного тензора второго ранга удобно ввести понятие *характеристической поверхности* тензора. Ее уравнение имеет вид уравнения, определяющего поверхность второго порядка:

$$a_{ij} x_i x_j = \pm 1$$

Если все главные значения тензора одинаковы $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то такой тензор называется *шаровым*. Шаровой тензор пропорционален единичному и имеет одинаковый вид во всех системах координат. Характеристическая поверхность шарового тензора есть сфера. Если два главных значения одинаковы, а третье отлично от них $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то тензор называется *симметрическим*. Его характеристическая поверхность является поверхностью вращения. Если все три собственные значения различны, то такой тензор называется *асимметрическим,* а его характеристическая поверхность является поверхностью второго порядка общего вида.

Если все главные значения тензора положительны, то тензор называется *положительно определенным.* Если все главные значения отрицательны, то тензор называется *отрицательно определенным*. В этих случаях при построении характеристических поверхностей надо выбирать разные знаки в правой части уравнения поверхности (плюс для положительно определенного тензора и минус для отрицательно определенного). И в том, и в другом случаях характеристическая поверхность тензора есть эллипсоид (шар в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, эллипсоид вращения в случае $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ и эллипсоид общего вида в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$).

Если некоторые собственные значения тензора положительны, а некоторые отрицательны, то тензор называется *знаконеопределенным*. Его характеристической поверхностью является гиперболоид с двумя листами, отвечающим двум знакам в правой части уравнения для характеристической поверхности.

Для вычисления собственных значений симметричного тензора второго ранга в трехмерном пространстве удобно воспользоваться следующим приемом. Преобразуем уравнение, определяющее собственные значения

$$\det\left\| a_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right\| = 0$$

к виду:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Замена переменной $\lambda = x - a/3$ приводит к кубическому уравнению относительно величины x, в котором отсутствует квадратичный член. (Удобно обозначить коэффициенты нового уравнения как –3p и 2q. В случае трех вещественных корней величина p > 0)

$$x^3 - 3px + 2q = 0$$

Корни этого уравнения могут быть найдены по формуле:

$$x_n = 2\sqrt{p}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right) + \frac{2\pi n}{3}\right); \qquad n = 1, 2, 3$$

$$\lambda_n = x_n - a/3$$

Ее доказательство основано на использовании известного выражения для синуса тройного аргумента: $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$. Запишем данное выражение как тождество: $4\sin^3\phi - 3\sin\phi + \sin 3\phi = 0$. Сделав в кубическом уравнении замену $x = 2\sqrt{p}\cdot z$, получим $8p\sqrt{p}z^3 - 6p\sqrt{p}z + 2q = 0$, или $4z^3 - 3z + q\Big/\left(p\sqrt{p}\right) = 0$. Сравнение данного уравнения с тригонометрическим тождеством позволяет найти все его корни как $z = \sin\phi_n$, где $\sin 3\varphi_n = q\Big/\left(p\sqrt{p}\right)$. Отсюда следует, что $\phi_n = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right) + \frac{2\pi n}{3}$

и соответственно: $x_n = 2\sqrt{p}\sin\varphi_n$, где n=1,2,3. (*Конец доказательства*).

Собственные векторы симметрического тензора a_{ij}, принадлежащие собственному значению λ_n, находим как $x_i^{(n)} = M_{1i}$, где M_{1i} - миноры матрицы $\left\| a_{ij} - \lambda_n \delta_{ij} \right\|$ с данным собственным значением λ_n.

Задачи.

4.1 Разложить в двумерном случае тензор второго ранга c_{ij} на сумму симметричного a_{ij} и антисимметричного b_{ij} тензоров. Компоненты тензора c_{ij} равны:

4.1.1 $c_{11} = 1,\ \ c_{12} = 2,\ \ c_{21} = -3,\ \ c_{22} = 5$

4.1.2 $c_{11} = -1,\ \ c_{12} = 4,\ \ c_{21} = -2,\ \ c_{22} = 1$

4.1.3 $c_{11} = 3,\ \ c_{12} = 1,\ \ c_{21} = -2,\ \ c_{22} = 6$

4.1.4 $c_{11} = 5,\ \ c_{12} = 2,\ \ c_{21} = 1,\ \ c_{22} = 1$

4.1.5 $c_{11} = 2,\ \ c_{12} = 1,\ \ c_{21} = -2,\ \ c_{22} = 3$

4.1.6 $c_{11} = 0,\ \ c_{12} = 6,\ \ c_{21} = 2,\ \ c_{22} = 4$

4.2 Разложить тензор второго ранга c_{ij} на сумму симметричного a_{ij} и антисимметричного b_{ij} тензоров, где c_{ij} равны

4.2.1 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 4.2.2 $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.3 $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4.2.4 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 2 & -1 & -7 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

Решение задачи 4.2.1. Используем для данного разложения формулы: $a_{ij} = \frac{1}{2}\left[c_{ij} + c_{ji}\right]$ и $b_{ij} = \frac{1}{2}\left[c_{ij} - c_{ji}\right]$. Непосредственное вычисление компонент симметричного и антисимметричного тензоров дает: $a_{11} = 1/2 \cdot (2+2) = 2$, $a_{12} = a_{21} = 1/2 \cdot (3+1) = 2$, $a_{13} = a_{31} = 1/2 \cdot (-2+6) = 2$ и т.д. $b_{11} = 1/2 \cdot (2-2) = 0$, $b_{12} = -b_{21} = 1/2 \cdot (3-1) = 1$, $b_{13} = -b_{31} = 1/2 \cdot (-2-6) = -4$ и т.д.

Ответ: $a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4.3 Для симметричного тензора a_{ij} на плоскости:

4.3.1 Найти собственные значения.

4.3.2 Найти собственные векторы.

4.3.3 Проверить ортогональность собственных векторов.

4.3.4 Найти орты системы координат, связанной с главными осями.

4.3.5 Записать матрицу поворота к главным осям.

4.3.6 Записать вид тензора в главных осях.

4.3.7 Построить характеристическую поверхность.

Произвести вычисления для тензоров с компонентами:

а) $a_{11} = 9,\ \ a_{12} = -2,\ \ a_{21} = -2,\ \ a_{22} = 6$

б) $a_{11}=3,\quad a_{12}=-9,\quad a_{21}=-9,\quad a_{22}=3$

в) $a_{11}=0,\quad a_{12}=3,\quad a_{21}=3,\quad a_{22}=6$

г) $a_{11}=1,\quad a_{12}=2,\quad a_{21}=2,\quad a_{22}=1$

4.4 Разложить тензор c_{ij} на сумму симметричного a_{ij} и антисимметричного b_{ij} тензоров. Для симметричного тензора a_{ij}:

4.4.1 Найти собственные значения.

4.4.2 Найти собственные векторы.

4.4.3 Проверить ортогональность собственных векторов

4.4.4 Найти орты системы координат, связанной с главными осями.

4.4.5 Записать матрицу поворота к главным осям.

4.4.6 Записать вид тензора в главных осях.

4.4.7 Классифицировать тензор (шаровой, симметрический, асимметрический, положительно, отрицательно определенный или знаконеопределенный).

Произвести вычисления для тензоров c_{ij} с компонентами:

а) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -5 \\ -9 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение задачи 4.4.1(а) Симметричная часть указанного тензора

$a_{ij}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Составим уравнение $\det\begin{Vmatrix} 9-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda \end{Vmatrix}=0$

Раскрыв определитель, получим $(2-\lambda)(\lambda^2-15\lambda+50)=0$. Нахождение корней этого уравнения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=10$ решает поставленную задачу.

Решение задачи 4.4.2(a) Проведем вычисление компонент собственного вектора, принадлежащего собственному значению $\lambda=2$. Для этого следует решить уравнение $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Подставив $\lambda=2$, распишем его как систему трех линейных уравнений $\begin{cases} 9x_1-2x_3=2x_1 \\ 2x_2=2x_2 \\ -2x_1+6x_3=2x_3 \end{cases}$. Отсюда следует, что $x_1=x_3=0$, $x_2=\forall$. (Здесь $\forall$ - любое вещественное число, не равное нулю) Аналогично, для $\lambda=5$ находим $x_3=2x_1=\forall$, $x_2=0$. И, наконец, для $\lambda=10$ компоненты собственного вектора $x_1=-2x_3=\forall$, $x_2=0$.

Решение задачи 4.4.4(a) Используем найденные выше три собственных вектора $\vec{x}^{(1)}=(0,a,0)$, $\vec{x}^{(2)}=(b,0,2b)$, $\vec{x}^{(3)}=(2c,0,-c)$, принадлежащих соответственно собственным значениям 2, 5, 10. Орты системы координат, связанной с главными осями тензора, по определению, это собственные векторы с модулями, равными единице. Очевидно, что при $a=1$, $b=c=1/\sqrt{5}$, собственные векторы имеют единичные модули. Поэтому, искомые орты имеют вид: $\vec{e}_1'=(0,1,0)$, $\vec{e}_2'=\left(1/\sqrt{5},0,2/\sqrt{5}\right)$, $\vec{e}_3'=\left(2/\sqrt{5},0,-1/\sqrt{5}\right)$

Решение задачи 4.4.5(a) Искомая матрица поворота $U_{ij}=\left(\vec{e}_i',\vec{e}_j\right)$, здесь $\vec{e}_i'$ - орты системы главных осей тензора, $\vec{e}_j$ -орты системы координат, в которой заданы компоненты тензора. Учитывая, что $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ вычислим все возможные скалярные произведения $\left(\vec{e}_i',\vec{e}_j\right)$. В итоге мы получим матрицу поворота $U_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, по строкам которой расположены компоненты орт системы главных осей тензора. Как у любой матрицы поворота ее определитель равен 1. В ряде случаев возможен результат (–1). Тогда, для построения матрицы поворота требуется дополнительно изменить направление одного из орт.

Решение задачи 4.4.6(а) Выполним поворот в систему главных осей тензора. Его компоненты в повернутой системе координат вычисляются как матричное произведение $(a)' = (U)(a)(U)^T$. Воспользуемся матрицей поворота, найденной в ходе решения предыдущей задачи, и вычислим матричное произведение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

В системе главных осей тензор диагонален, а на его главной диагонали расположены главные (собственные) значения.

4.5 Какая характеристическая поверхность отвечает тензору, у которого одна (две) главных значения равны 0?

5. СИМВОЛ ЛЕВИ-ЧИВИТА.

В трехмерном пространстве символ Леви-Чивита e_{ijk} есть полностью антисимметричная многокомпонентная величина, меняющая знак при перестановке любой пары индексов. Все компоненты символа Леви-Чивита, имеющие два или три одинаковых индекса, равны нулю. Например, $e_{122}=e_{333}=e_{131}=0$. Компонента e_{123} выбирается равной 1. Тогда все компоненты, отличные от нуля, равны:

$$e_{123}=e_{231}=e_{312}=1$$

$$e_{321}=e_{213}=e_{132}=-1$$

Символ Леви-Чивита e_{ijk} не меняет своего значения при циклической перестановке индексов: $e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}$

Символ Леви-Чивита e_{ijk} можно также определить как смешанное произведение ортов правой координационной тройки:

$$e_{ijk}=\left(\vec{e}_i,\left[\vec{e}_j,\vec{e}_k\right]\right)$$

Задание. Убедиться, что векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть записано в виде:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{e}_i\, e_{ijk}\, a_j\, b_k$$

Задание. Убедиться, что ротор векторной величины $\vec{A}$ может быть записан в виде:

$$rot\,\vec{A}=\left[\nabla,\vec{A}\right]=\vec{e}_i\, e_{ijk}\,\nabla_j\, A_k=\vec{e}_i\, e_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}A_k$$

Для произведения двух символов Леви-Чивита с последующей сверткой по одному индексу в каждом символе имеет место следующая формула:

$$e_{ijk}e_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}$$

Задание. Проверить предыдущее равенство для конкретных значений индексов j,k,l,m.

Для решения ряда нижеследующих задач необходимо учесть тождества:

$$\nabla_i x_k = \frac{\partial}{\partial x_i} x_k = \delta_{ik} \qquad\qquad \delta_{ii} = 3$$

Задачи.

5.1 Вычислить:

5.1.1 e_{ijj}	5.1.2 $e_{ijk}e_{klm}$
5.1.3 $e_{ijj}e_{ikm}$	5.1.4 $e_{ijk}e_{kjm}$
5.1.5 $e_{ijk}e_{ijm}$	5.1.6 $e_{ijk}e_{imj}$
5.1.7 $e_{ijk}e_{klm}e_{mnq}$	5.1.8 $e_{ijk}e_{klm}e_{lin}$

Решение задачи 5.1.5. Используем формулу для свертки: $e_{ijk}e_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$. Положим далее значение индекса $l = j$ и выполним свертку по паре индексов j. $e_{ijk}e_{ijm} = \delta_{jj}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kj} = 3\delta_{km} - \delta_{km} = 2\delta_{km}$. Здесь использовано, что $\delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ и $\delta_{jm}\delta_{kj} = \delta_{km}$.

5.2 Записать формулу для смешанного произведения трех векторов $\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$, использую символ Леви-Чивита.

5.3 Получить формулу преобразования двойного векторного произведения $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, используя символ Леви-Чивита.

Решение задачи 5.3. Запишем выражение для i-ой компоненты двойного векторного произведения $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]_i$ как свертку $e_{ijk}a_j\left[\vec{b},\vec{c}\right]_k$. С учетом, что $\left[\vec{b},\vec{c}\right]_k = e_{klm}b_l c_m$, получим $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]_i = e_{ijk}a_j e_{klm}b_l c_m = e_{kij}e_{klm}a_j b_l c_m$.

Далее, $e_{kij}e_{klm}a_j b_l c_m = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)a_j b_l c_m = \delta_{il}\delta_{jm}a_j b_l c_m - \delta_{im}\delta_{jl}a_j b_l c_m =$ $\delta_{jm}a_j b_i c_m - \delta_{jl}a_j b_l c_i = a_j b_i c_j - a_j b_j c_i = b_i a_j c_j - c_i a_j b_j$. Или, что эквивалентно $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]_i = b_i\left(\vec{a},\vec{c}\right) - c_i\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

5.4 Преобразовать выражения, используя символ Леви-Чивита.

5.4.1 $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right)$

5.4.2 $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{c},\vec{d}\right]\right]$

5.4.3 $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{a},\vec{c}\right]\right)$

5.4.4 $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{a},\vec{c}\right]\right]$

5.4.5 $rot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

5.4.6 $rot\left(f\cdot\vec{A}\right)$

5.4.7 $div\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

5.4.8 $rot\,rot\,\vec{A}$

5.4.9 $rot\,rot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

5.4.10 $rot\,grad\,f$

5.4.11 $div\,rot\,\vec{A}$

Решение задачи 5.4.6. Воспользуемся выражением для ротора

$$rot\left(f\vec{A}\right) = \vec{e}_i e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(fA_k\right) = \vec{e}_i e_{ijk}\frac{\partial f}{\partial x_j}A_k + \vec{e}_i e_{ijk} f\frac{\partial A_k}{\partial x_j}.$$

В силу определения $grad\ f = \vec{e}_j\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, или $\left(grad\ f\right)_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, отсюда следует

что $\vec{e}_i e_{ijk}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}A_k = \left[grad\ f,\ \vec{A}\right]$ и $\vec{e}_i e_{ijk} f\dfrac{\partial A_k}{\partial x_j} = f\,\vec{e}_i e_{ijk}\dfrac{\partial A_k}{\partial x_j} = f\cdot rot\,\vec{A}$.

Итого: $rot\left(f\vec{A}\right) = \left[grad\ f,\ \vec{A}\right] + f\cdot rot\,\vec{A}$

5.5 Вычислить, используя символ Леви-Чивита:

5.5.1 $rot\left[\left[\vec{a},\vec{r}\right],\left[\vec{b},\vec{r}\right]\right]$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы.

5.5.2 $rot\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]$, где $\vec{\omega}$ - постоянный вектор.

5.5.3 $div\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]$, где $\vec{\omega}$ - постоянный вектор.

5.5.4 $rot\,\vec{r}$

5.5.5 $rot\left(f(r)\vec{r} \right)$

5.5.6 $rot\left(\vec{\omega} f(\vec{k}\,\vec{r})\right)$, где $\vec{\omega}$ и $\vec{k}$ - постоянные векторы.

5.6 Показать, что определитель матрицы $\left|a_{i\,j}\right|$ можно записать в виде

$$\left|a_{i\,j}\right| = e_{mn\,p} a_{1m} a_{2n} a_{3p}.$$

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ ИНВЕРСИИ.

До сих пор мы рассматривали преобразование тензоров только при повороте системы координат. В этом случае выведенная в разделе 2 матрица преобразования (U) ортогональна. Из условия ортогональности $(U)^T (U) = (1)$ следует, квадрат определителя матрицы (U) равен 1, а сам определитель $\det\|U\| = \pm 1$. Поворот системы координат на конечный угол можно рассматривать как суперпозицию ряда поворотов на малые углы. Поскольку матрица поворота на малый угол близка к единичной матрице, ее определитель равен 1. Матрица поворота на конечный угол строится как произведение матриц поворотов на малые углы, поэтому ее определитель тоже равен 1, т.е. при любых поворотах на конечный угол $\det\|U\| = +1$.

Ортогональные преобразования, для которых выполняется последнее равенство, называются собственными. Если определитель равен -1, то такие преобразования называются несобственными. Несобственные преобразования возникают при последовательном проведении поворота и инверсии системы координат. При инверсии направления всех ортов изменяются на противоположные:

$$\vec{e}_i' = -\vec{e}_i$$

так что матрица преобразования системы координат в случае инверсии равна:

$$(U_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Отсюда ясно, что $\det\|U_0\| = -1$, Таким образом, любое ортогональное преобразование, матрица которого равна $(U_0)(U)$, где (U)- матрица поворота, имеет определитель равный -1.

Закон преобразования компонент истинных тензоров при любых ортогональных преобразованиях координат (как собственных, так и несобственных) имеет вид:

$$a'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_N} U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_N j_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N} = U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_N j_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N}$$

При решении ряда физических задач, помимо истинных тензоров необходимо вводить в рассмотрение *псевдотензоры*, т.е. многокомпонентные величины, закон преобразования которых имеет вид:

$$a'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \det\|U\| \sum_{j_1 j_2 \dots j_N} U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_N j_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N} = U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_N j_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N}$$

Этот закон преобразования не отличается от закона преобразования тензора в случае собственных ортогональных преобразований при $\det\|U\| = +1$, но в случае несобственных преобразований истинные тензоры и псевдотензоры преобразуются по разному закону.

Псевдотензор первого ранга называется псевдовектором. Псевдовекторы нередко называют *аксиальными* векторами, а истинные векторы *полярными.* Если представить вектор, как направленный отрезок, то псевдовектор следует считать отрезком параллельным заданной линии, но не имеющим определенного направления. Направление отрезка, соответствующего псевдовектору, обычно доопределяют с учетом той координатной тройки, которая используется при работе. Псевдовектором является *векторное произведение* двух истинных векторов, определенное по правилу правой руки, если используется правая система координат, так как направление отрезка в этом случае определяется выбором именно правой тройки ортов координатной системы.

Псевдовекторами являются, например, момент импульса и момент силы, магнитный дипольный момент, напряженность магнитного поля. Истинными векторами являются радиус-вектор, сила, скорость, ускорение, напряженность электрического поля.

Символ Леви-Чивита, является псевдотензором третьего ранга. Для проверки этого утверждения найдем компоненты символа Леви-Чивита e'_{ijk} в иной декартовой системе координат, считая, что этот символ преобразуется по закону преобразования псевдотензора третьего ранга:

$$e'_{ijk} = \det\|U\| \sum_{n,m,p} U_{in} U_{jm} U_{kp} e_{nmp}$$

Рассмотрим это равенство для случая, если i=1, j=2, k=3. Согласно задаче 5.6 сумма, фигурирующая в правой части последнего равенства, является определителем матрицы (U). Отсюда ясно, что $e'_{123} = \left(\det\|U\|\right)^2 = 1$. Антисимметричность символа Леви-Чивита e_{nmp} относительно перестановки любой пары индексов n,m,p автоматически влечет антисимметричность величин e'_{ijk}, определенных законом преобразования псевдотензора третьего ранга. Поэтому, величины $e'_{ijk} = 1$, для i,j,k=123,231,312 и $e'_{ijk} = -1$ для i,j,k=213,132, 321 и равны нулю в случае, если значения индексов совпадают. Таким образом, компоненты символа Леви-Чивита не зависят от выбора системы координат, что согласуется с их определением, если они преобразуются как псевдотензор третьего ранга.

Действия над тензорами, описанные в разделе 3, обобщаются на случай псевдотензоров:

1. Покомпонентное сложение возможно в случае, когда оба слагаемых являются тензорами или псевдотензорами одинакового ранга. Покомпонентное сложение тензоров и псевдотензоров одинакового ранга в физических уравнениях *принципиально возможно*. Но “закон природы”, описанный такими уравнениями, не симметричен относительно зеркальных отражений.
2. Внешнее произведение тензора и псевдотензора дает псевдотензор суммарного ранга. Внешнее произведение двух псевдотензоров дает тензор суммарного ранга.
3. Операция свертки псевдотензора по паре одинаковых индексов дает псевдотензор ранга, на два меньше исходного.
4. При перестановке индексов в псевдотензоре получается псевдотензор того же ранга.

Задачи.

6.1 Найти матрицу преобразования, включающую вначале поворот на 90^0 вокруг оси Oz, а затем инверсию.

Решение задачи 6.1 Искомая матрица преобразования строится как произведение двух матриц: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Правая матрица определяет преобразование системы координат при повороте вокруг оси OZ на угол ϕ. (См решение задачи 2.2.3). Левая матрица –

определяет преобразование системы координат при инверсии. Найдем их произведение для конкретного значения угла поворота $\phi = \pi/2$,

$$(U) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.2 Как преобразуются компоненты псевдовектора при инверсии?

Решение задачи 6.2 При инверсии системы координат компоненты псевдовектора преобразуются по закону $c'_i = \det\|U_0\|(U_0)_{ij}\, c_j$, где $(U_0)_{ij} = -\delta_{ij}$. Учитывая, что определитель матрицы (U_0) равен –1, получим $c'_i = \delta_{ij} c_j = c_i$. При инверсии системы координат компоненты псевдовекторов не изменяются (в отличие от векторов, компоненты которых изменят знак).

6.3 Даны: a_i истинный вектор и b_i - псевдовектор. Чем является их векторное произведение - вектором или псевдовектором?

6.4 Даны: a_i, b_i и c_i- истинные векторы. Что представляет собой их смешанное произведение $\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$?

6.5 Даны: a_i и b_i - истинные векторы, e_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивита. Что представляет собой многокомпонентная величина $e_{ijk} a_j b_k$? Почему? Какие операции производятся при получении этой величины?

Решение задачи 6.5 В результате выполнения свертки по двум парам индексов j,k внешнего произведения псевдотензора 3-го ранга e_{ijk} и тензора 2-го ранга $a_j b_k$ должен получиться псевдотензор 1-го ранга (псевдовектор). Убедимся в этом. Выполним такую свертку в иной декартовой координационной системе $e'_{ijk} a'_j b'_k = \sum_{jk} \det\|U\| \sum_{l,m,n,p,q} U_{il} U_{jm} U_{kn} e_{lmn} U_{jp} a_p U_{kq} b_q$. Мы воспользовались законами преобразования компонент символа Леви-Чивита и векторов. Учтем ортогональность матрицы преобразования $\sum_j U_{jm} U_{jp} = \delta_{mp}$, $\sum_k U_{kn} U_{kq} = \delta_{nq}$, и просуммируем по индексам j,k. В результате получим:

$$e'_{ijk} a'_j b'_k = \det\|U\| \sum_{l,m,n,p,q} U_{il} \delta_{mp} \delta_{nq} e_{lmn} a_p b_q = \det\|U\| \sum_{l,m,n} U_{il} e_{lmn} a_m b_n .$$

Данное выражение можно записать более компактно как $c'_i = \det\|U\| \sum_l U_{il} c_l$, где $c_i = e_{ijk} a_j b_k$. Что и подтверждает законность операций внешнего произведения и свертки, в результате которых получается псевдотензор 1-го ранга $e_{ijk} a_j b_k$.

6.6 Даны: a_i - псевдовектор, e_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивита. Что представляет собой многокомпонентная величина $e_{ijk} a_k$? Почему?

6.7 Даны: a_i - истинный вектор, b_i - псевдовектор. Что представляет собой величина $a_k b_k$? Почему?

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА.

Закон преобразования компонент радиус-вектора $\vec{r}\,(x_1, x_2, x_3)$ при ортогональном преобразовании декартовой системы координат имеет тот же вид, что и закон преобразования любого вектора (см. раздел 2):

$$x'_i = \sum_j U_{ij} x_j$$

Рассмотрим новые координаты $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ как функции координат

$\{x_1, x_2, x_3\}$ (т.е. $x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3)$), мы видим, что:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = U_{ij}$$

Матрица обратного преобразования определяется матричными элементами:

$$(U)^{-1}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$$

Поскольку матрица (U) ортогональна, то

$$(U)^{-1}_{ij} = (U)^{T}_{ij} = U_{ji}$$

таким образом, в случае ортогональных преобразований:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

Теперь можно строго доказать, что частные производные скалярного поля φ в каждой точке пространства являются компонентами векторного поля $grad\,\varphi$. Компоненты градиента в новой системе координат $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ равны: $\dfrac{\partial \varphi'\{x'_1, x'_2, x'_3\}}{\partial x'_i}$. При этом $\varphi'\{x'_1, x'_2, x'_3\} = \varphi\{x_1, x_2, x_3\}$.

Переходя от новых координат $\{x'_i\}$, к исходным координатам $\{x_i\}$ получаем:

$$\frac{\partial \varphi'\{x'_1, x'_2, x'_3\}}{\partial x'_i} = \frac{\partial \varphi\{x_1, x_2, x_3\}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = U_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

Итак, мы видим, что величины: $\partial\varphi/\partial x_i$ в самом деле, преобразуются по закону преобразования векторных величин.

Аналогично доказывается, что многокомпонентные величины $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$ и $\partial u_i/\partial x_j$, где u_i - компоненты векторного поля, являются тензорами второго ранга. Тензор второго ранга $\partial u_i / \partial x_j$ в общем случае не является ни симметричным, ни антисимметричным тензором. Его, однако, можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

Антисимметричный тензор второго ранга $p_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$ имеет три отличные от нуля компоненты. Вследствие этого бывает удобно вместо тензора p_{ij} ввести псевдовектор, определенный равенством: $s_i = e_{ijk} p_{kj}$.

Симметричный тензор $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$ удобно представить в виде суммы шарового тензора и симметричного тензора, имеющего нулевой след (тензора девиации D_{ij}):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] = \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = D_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\, div\vec{u}$$

Для тензорного поля $T_{i_1 i_2 \ldots i_N}(x_1, x_2, x_3)$ N-го ранга справедлива обобщенная теорема Остроградского-Гаусса.

$$\int_V \sum_{i_N} \frac{\partial T_{i_1 i_2 \ldots i_N}}{\partial x_{i_N}} dV = \int_S \sum_{i_N} T_{i_1 i_2 \ldots i_N} dS_{i_N} \qquad (7.1)$$

Задачи.

7.1. Доказать, что многокомпонентная величина $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$ является симметричным тензором второго ранга.

7.2. Дан вектор u_i. Доказать, что многокомпонентная величина $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ является тензором второго ранга.

7.3 Показать, что $s_i = e_{ikj} p_{jk} = e_{ikj} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} = \left(rot\, \vec{u} \right)_i$, здесь $p_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$.

7.4 Доказать, что тензор девиации имеет нулевой след: $D_{ii} = 0$.

Решение задачи 7.4 Свернем тензор девиации $D_{ij} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \dfrac{1}{3}\delta_{ij} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}$ по индексам i,j. Учитывая, что величина свертки единичного тензора $\delta_{ii} = 3$, получим $D_{ii} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] - \dfrac{1}{3}\delta_{ii} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} - \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$.

7.5 Векторное поле $\vec{u}$ имеет компоненты: $\vec{u} = (2x - 3y,\ 4x + 3z,\ x + y - z)$. Найти компоненты тензора девиации D_{ij}

Решение задачи 7.5 Вычислим значения всех частных производных $\partial u_i / \partial x_j$. Получим: $\partial u_1/\partial x_1 = 2$, $\partial u_1/\partial x_2 = -3$, $\partial u_1/\partial x_3 = 0$, $\partial u_2/\partial x_1 = 4$, $\partial u_2/\partial x_2 = 0$, $\partial u_2/\partial x_3 = 3$, $\partial u_3/\partial x_1 = 1$, $\partial u_3/\partial x_2 = 1$, $\partial u_3/\partial x_3 = -1$. С учетом значения величины свертки $\partial u_k/\partial x_k = 2 + 0 - 1 = 1$, найдем компоненты тензора девиации

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{3}\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/3 & 2 \\ 1/2 & 2 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

7.6 Задано векторное поле $\vec{u}$ в двумерном пространстве: $\vec{u} = (xy,\ x^2 - y^2)$. Найти компоненты тензора девиации D_{ij} в точках: a) x=1, y=2; b) x=0, y=1. Найти собственные значения и собственные векторы тензора девиации в этих точках.

Решение задачи 7.6 В двумерном пространстве тензор девиации имеет вид:

$D_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] - \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$. Индексы i,j в данном случае принимают значения только 1 и 2. След единичного тензора $\delta_{ii} = 2$, отсюда следует что $D_{ii} = 0$. Вычислим значения всех частных производных $\partial u_i / \partial x_j$. Получим: $\partial u_1/\partial x_1 = x_2$, $\partial u_1/\partial x_2 = x_1$, $\partial u_2/\partial x_1 = 2x_1$, $\partial u_2/\partial x_2 = -2x_2$. Свертка $\partial u_k/\partial x_k = -x_2$.

Компоненты тензора девиации $D_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_2/2 & 3x_1/2 \\ 3x_1/2 & -3x_2/2 \end{pmatrix}$. В точке с координатами $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ компоненты $D_{11} = -D_{22} = 3$, $D_{12} = D_{21} = 3/2$. Собственные значения $\lambda_{1,2}$ данного тензора находим как корни уравнения $\det\begin{Vmatrix} 3-\lambda & 3/2 \\ 3/2 & -3-\lambda \end{Vmatrix} = 0$, или $(3-\lambda)(-3-\lambda) - 9/4 = 0$, отсюда $\lambda_{1,2} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Подставив поочередно найденные собственные значения в уравнение, определяющее компоненты собственных векторов, $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3/2 \\ 3/2 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, найдем $3/2 \cdot E_1 = (3+\lambda)E_2$. Собственные векторы находятся с точностью до общего множителя, поэтому можно задать значение компоненты $E_2 = 1$, что дает значение компоненты $E_1 = 2 + 2\lambda/3$. Итого, векторы с компонентами $\left(2 \pm \sqrt{5}\ , 1\right)$ являются собственными векторами тензора девиации в заданной точке двумерного пространства и принадлежат собственным значениям $\lambda_{1,2} = \pm 3\sqrt{5}/2$, соответственно.

7.7 Доказать обобщенную теорему Остроградского-Гаусса для тензорного поля $T_{i_1 i_2 \ldots i_N}(x_1, x_2, x_3)$ N-го ранга.

Указание: Умножить обе части равенства (7.1) на произвольный постоянный тензор $A_{i_1 i_2 \dots i_{N-1}}$ ранга (N-1) и выполнить свертку по индексам $i_1 i_2 \dots i_{N-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин. Сборник задач по электродинамике.- М.: Наука, 1970.
2. А.И.Борисенко, И.Е.Тарапов. Векторный анализ и начала тензорного исчисления.- Харьков: Вища школа, 1986.
3. П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ - М.: Наука, 1967.